

DIE VERTAUSCHBARKEIT DES HOM-FUNKTORS MIT DIREKTEN SUMMEN

Inaugural-Dissertation zur Erlangung
der Doktorwürde der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Rudolf RENTSCHLER aus Nagold

München, Januar 1967

DIE VERTAUSCHBARKEIT DES HOM-FUNKTORS MIT DIREKTEN SUMMEN

Inaugural-Dissertation zur Erlangung
der Doktorwürde der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Rudolf RENTSCHLER aus Nagold

München, Januar 1967

Berichterstatter: Prof. Dr. F. KASCH

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Februar 1967



INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	
<u>Kapitel I : Σ-MODULN .-</u>	
§ 1 . Ein Kriterium für die Vertauschbarkeit des Hom-Funktors mit direkten Summen im zweiten Argument	1
§ 2 . Σ -Moduln. Definition und einfache Folgerungen	3
§ 3 . Verhalten gegenüber ganzen Ringerweiterungen	6
§ 4 . Existenz nicht endlich erzeugter Σ -Moduln	9
§ 5 . Torsionsfreie Σ -Moduln über Krullschen Ringen	11
 <u>Kapitel II : RINGE, ÜBER DENEN JEDER Σ-MODUL ENDLICH ERZEUGT IST .-</u>	
§ 1 . Σ -Moduln und Noethersche Ringe	13
§ 2 . Endliche Erzeugbarkeit von Σ -Moduln, die Summe von Noetherschen Untermoduln sind	14
§ 3 . Reduktion des Problems der endlich Erzeugbarkeit von Σ -Moduln und einige Resultate	18
§ 4 . Vollständige Lösung des Problems für Bewertungsringe ...	23
§ 5 . Zentral abzählbar erzeugbare Ringe über einem Schiefkörper	24
§ 6 . Kommutative abzählbar erzeugbare Ringe über einem Noether- schen Ring	28
Literaturverzeichnis	30



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINLEITUNG

=====

Ist A ein endlich erzeugter Modul über einem Ring R , so ist der Funktor $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen vertauschbar. Ein Σ -Modul ist ein Modul, der diese Eigenschaft mit den endlich erzeugten Moduln gemeinsam hat. Manche Autoren [8], [11] nennen einen solchen Modul klein; es stellt sich jedoch heraus (I, § 2), dass Σ -Moduln sehr gross sind, sofern sie nicht endlich erzeugt sind.

In dieser Arbeit wird die Frage behandelt, unter welchen Voraussetzungen man aus der Vertauschbarkeit von $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen auf die endliche Erzeugbarkeit von A schliessen kann. Für Noethersche Ringe trifft diese Behauptung zu (II, § 1); zum Beweis macht man von der Tatsache Gebrauch, dass die direkte Summe von injektiven Moduln über Noetherschen Ringen injektiv ist. Da die Noetherschen Ringe durch diese Eigenschaft charakterisiert werden, ist diese Methode damit weitgehend erschöpft.

In den folgenden Paragraphen zeigt es sich nun, dass die Ringe, in denen jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist, einer weiteren Behandlung zugänglich sind (II, §§ 3-6). Für zwei grosse Klassen von Ringen wird gezeigt, dass jeder Σ -Modul endlich erzeugt ist. Es sind dies die zentral abzählbar erzeugbaren Ringe über einem Schiefkörper (II, § 5) und die abzählbar erzeugbaren kommutativen Ringe über einem kommutativen Noetherschen Ring (II, § 6). Dass diese beiden Ergebnisse in dem Fall von Polynomringen nicht verbessert werden können, zeigt ein Gegenbeispiel in Kapitel I, § 4. Eine ebenfalls vollständige Lösung des Problems wird für Bewertungsringe gegeben (II, § 4). Hingegen bleibt die Frage offen, ob über einem Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten über einem nicht-kommutativen Noetherschen Ring jeder Σ -Modul endlich erzeugt ist. Die Methoden des letzten Paragraphen widersetzen sich einer Übertragung auf den nichtkommutativen Fall. Einige weitere Resultate, insbesondere für lokale Ringe und kommutative Ringe befinden sich in Kapitel II, § 3.

Außerdem wird gezeigt, dass torsionsfreie Moduln über einem Krullschen Ring R endlich erzeugt sind, sofern jedes Ideal von R

abzählbar erzeugbar ist (I, § 5). Über einem beliebigen Ring wird gezeigt, dass jeder Σ -Modul, der Summe von Noetherschen Untermoduln ist, endlich erzeugt ist (II, § 2).

Kapitel I enthält eine Zusammenstellung der Eigenschaften von Σ -Moduln. Für endlich erzeugte kommutative ganze Ringerweiterungen $S \subseteq R$ wird bewiesen: Jeder Σ -R-Modul ist ein Σ -S-Modul (I, § 3).

Wie man in gewissen Fällen aus der endlichen Erzeugbarkeit von Σ -Moduln auf die Existenz von abzählbar erzeugten Faktor-moduln schliessen kann, zeigt sich in Kapitel II, § 3 (Beispiel 3.11.).

Kapitel I

Σ - MODULN

§ 1. Ein Kriterium für die Vertauschbarkeit des Hom-Funktors mit direkten Summen im zweiten Argument.

Es sei R ein Ring. Für jeden R -Modul A und für jede Familie $X = (X_\alpha)_{\alpha \in I}$ von R -Moduln hat man einen kanonischen Homomorphismus,

$$\varphi_{A,X} : \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}(A, X_\alpha) \longrightarrow \text{Hom}(A, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha)$$

der wie folgt definiert ist: Bezeichnet man mit j_α die kanonische Injektion $X_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\beta \in I} X_\beta$, so ist $\varphi_{A,X}((\psi_\alpha)_{\alpha \in I}) := \sum_{\alpha \in I} j_\alpha \psi_\alpha$ für jedes

$(\psi_\alpha)_{\alpha \in I} \in \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}(A, X_\alpha)$. Es ist klar, dass $\varphi_{A,X}$ für jeden R -Modul A und für jede Familie $X = (X_\alpha)_{\alpha \in I}$ von R -Moduln ein Monomorphismus ist. Man sagt, dass für einen festen R -Modul A der Funktor $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen vertauschbar ist, wenn für jede Familie $X = (X_\alpha)_{\alpha \in I}$ von R -Moduln der Homomorphismus $\varphi_{A,X}$ ein Isomorphismus ist. Ist der R -Modul A endlich erzeugt, dann ist $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen vertauschbar. Ist der Ring R beliebig, so gibt es im allgemeinen noch weitere R -Moduln A , für die $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen vertauschbar ist. In Kapitel II werden einige Klassen von Ringen angegeben, über denen man aus der Vertauschbarkeit von $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen auf die endliche Erzeugbarkeit von A schließen kann.

Die Vertauschbarkeit von $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen lässt sich durch innere Eigenschaften des R -Moduls A charakterisieren, wie das folgende Kriterium zeigt:

Kriterium 1.1.

$\text{Hom}_R(A, -)$ ist genau dann mit direkten Summen vertauschbar, wenn es zu jeder aufsteigenden Kette von Untermoduln $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ mit $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

ein n gibt mit $A = A_n$.

Dieses Kriterium ist in dem folgenden Satz enthalten :

Satz 1.2.

Für einen R -Modul A sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (i) $\text{Hom}_R(A, -)$ ist mit direkten Summen vertauschbar .
- (ii) $\text{Hom}_R(A, -)$ ist mit abzählbaren direkten Summen vertauschbar.
- (iii) Ist $f : A \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ ein Homomorphismus von A in eine direkte Summe von R -Moduln, so liegt das Bild $f(A)$ bereits in einer endlichen Teilsumme.
- (iv) Ist $f : A \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ein Homomorphismus von A in eine abzählbare direkte Summe von R -Moduln, so liegt das Bild $f(A)$ bereits in einer endlichen Teilsumme.
- (v) Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von A mit $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, so gibt es ein n mit $A = A_n$.

Beweis .

i) $\Rightarrow$ iii) Sei $f \in \text{Hom}_R(A, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha)$. Für jedes $\alpha \in I$ bezeichne $j_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\beta \in I} X_\beta$ die kanonische Injektion und $\pi_\alpha : \bigoplus_{\beta \in I} X_\beta \rightarrow X_\alpha$ die kanonische Projektion. Dann ist $f = \sum_{\alpha \in I} j_\alpha \psi_\alpha$ mit einem $(\psi_\alpha)_{\alpha \in I} \in \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}(A, X_\alpha)$ genau dann, wenn $\pi_\alpha f = 0$ für fast alle $\alpha \in I$, d.h. wenn $f(A)$ in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ liegt .

ii) $\Leftrightarrow$ iv) analog .

i) $\Rightarrow$ ii) klar .

iv) $\Rightarrow$ iii) Angenommen, $f : A \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ ist ein Homomorphismus, dessen Bild $f(A)$ nicht in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ enthalten ist.

Dann gibt es eine abzählbare Teilmenge $I' \subseteq I$ mit $\pi_\alpha f \neq 0$ für alle $\alpha \in I'$

wo $\pi_\alpha : \bigoplus_{\beta \in I} X_\beta \rightarrow X_\alpha$ die kanonische Projektion bezeichnet. Sei π die Projektion $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ und sei $g := \pi f$. Dann ist $g(A)$ in keiner endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ enthalten im Widerspruch zu iii).

iii) $\Rightarrow$ v) Es sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von A mit $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $v_i : A \rightarrow A/A_i$ der kanonische Homomorphismus; $f : A \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} A/A_i$ sei der Homomorphismus mit den Komponenten v_i . Ist $a \in A$, so ist $v_i(a) = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Daher ist das Bild $f(A) \subseteq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A/A_i$. Nach iii) ist dann $f(A) \subseteq \bigoplus_{i=1}^k A/A_i$ für ein gewisses $k \in \mathbb{N}$. Das bedeutet aber $A = A_{k+1}$.

v) $\Rightarrow$ iii) Angenommen, $f : A \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ist ein Homomorphismus, dessen Bild nicht in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} X_i$ enthalten ist. Sei $A_k := f^{-1}(\bigoplus_{i=1}^k X_i)$. Dann ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von A mit $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und es gibt $A_k \neq A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu v).

Für endlich erzeugte Moduln hat man eine zu 1.1. analoge Charakterisierung:

Bemerkung 1.3.

Ein R -Modul A ist genau dann endlich erzeugt, wenn für jede nach oben gefilterte Familie $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ von Untermoduln von A mit $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ein $\beta \in I$ existiert mit $A = A_\beta$.

§ 2. Σ -Moduln . Definition und einfache Folgerungen .

Definition 2.1.

Ein R -Modul A heisst ein Σ - R -Modul, wenn $\text{Hom}_R(A, -)$ mit direkten Summen vertauschbar ist.

Solche Moduln werden gelegentlich auch als kleine Moduln bezeichnet [8]
[11]. Da Σ -Moduln jedoch sehr gross sind, sofern sie nicht endlich erzeugt
sind, - sie besitzen in diesem Fall kein abzählbares Erzeugendensystem (s.u.) -
soll in dieser Arbeit von der Bezeichnung "kleine Moduln" abgesehen werden.

Behauptung 2.2.

Ist A ein abzählbar erzeugbarer Σ - R -Modul, so ist A endlich erzeugt.

Beweis .

Es sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Erzeugendensystem von A . Es sei $A_k := \sum_{i=1}^k R a_i$.

Dann ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von A mit
 $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Also existiert ein n mit $A = A_n = \sum_{i=1}^n R a_i$.

Behauptung 2.3.

Es sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\gamma} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von R -Moduln. Dann gilt

- i) Ist B ein Σ -Modul, so ist auch C ein Σ -Modul.
- ii) Sind A und C Σ -Moduln, so ist auch B ein Σ -Modul.

Beweis .

Es sei $X = (X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von R -Moduln. Man betrachte das
kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}_R(C, X_\alpha) & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}_R(B, X_\alpha) & \longrightarrow & \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}_R(A, X_\alpha) \\
 & & \downarrow \varphi_{C,X} & & \downarrow \varphi_{B,X} & & \downarrow \varphi_{A,X} \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(C, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(B, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(A, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha)
 \end{array}$$

- i) Ist B ein Σ -Modul, so ist $\varphi_{B,X}$ ein Isomorphismus. Also ist auch
 $\varphi_{C,X}$ ein Isomorphismus, da $\varphi_{A,X}$ ein Monomorphismus ist. Daher ist C ein
 Σ -Modul.

ii) Sind A und C Σ -Moduln und ist $f \in \text{Hom}_R(B, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha)$, so existiert eine endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ mit $f(A) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in I'} X_\alpha$. Es sei π die Projektion $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I'} X_\alpha$. Dann lässt sich πf durch C faktorisieren, d.h. es existiert ein $g \in \text{Hom}_R(C, \bigoplus_{\alpha \in I'} X_\alpha)$ mit $\pi f = g \nu$. Da C ein Σ -Modul ist, existiert eine endliche Teilmenge $I'' \subseteq I \setminus I'$ mit $g(C) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in I''} X_\alpha$. Daraus folgt aber $f(B) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in I' \cup I''} X_\alpha$. Also ist B ein Σ -Modul.

Folgerung 2.4.

i) Jeder direkte Summand eines Σ -Moduls ist ein Σ -Modul.

ii) Sind $A_1, \dots, A_k$ endlich viele Σ -Moduln, so ist auch ihre Summe $\bigoplus_{i=1}^k A_i$ ein Σ -Modul.

Beweis.

i) Folgt unmittelbar aus 2.3. i).

ii) Aus 2.3. ii) folgt dass, die direkte Summe zweier Σ -Moduln wieder ein Σ -Modul ist.

Behauptung 2.5.

Ist $R \xrightarrow{\varphi} T$ ein Ringhomomorphismus und ist ${}_R A$ ein Σ - R -Modul, so ist $T \otimes_R A$ ein Σ - T -Modul.

Beweis.

Sei $X = (X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von T -Moduln. Man betrachte das kommutative Diagramm mit Isomorphismen in den Spalten:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}_R(A, X_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_{A, X}} & \text{Hom}_R(A, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha) \\
 \downarrow \text{IR} & & \downarrow \text{IR} \\
 \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Hom}_T(T \otimes_R A, X_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_{T \otimes_R A, X}} & \text{Hom}_T(T \otimes_R A, \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha)
 \end{array}$$

Da A ein Σ - R -Modul ist, ist $\varphi_{A,X}$ ein Isomorphismus, also ist auch $\varphi_{T \otimes_R A, X}$ ein Isomorphismus. Somit ist $T \otimes_R A$ ein Σ - T -Modul.

Folgerung 2.6.

Ist R ein kommutativer Ring, S ein multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R , A ein Σ - R -Modul, so ist A_S ein Σ - R_S -Modul.

Bemerkung 2.7.

Ist R ein Ring, und ist A ein R -Modul, der von einem zweiseitigen Ideal $I \subseteq R$ annulliert wird, so ist A genau dann ein Σ - R -Modul, wenn A ein Σ - R/I -Modul ist.

§ 3. Verhalten gegenüber ganzen Ringerweiterungen.

Satz 3.1.

Es seien R, S zwei kommutative Ringe, $S \not\subseteq R$ sei ein Ringhomomorphismus derart, dass R als S -Modul endlich erzeugt ist. Ist A ein Σ - R -Modul, so ist A sogar ein Σ - S -Modul.

Lemma 3.2.

Es seien S ein kommutativer Ring und $p(x) \in S[x]$ ein Polynom mit höchstem Koeffizienten 1 und vom Grad n . Sei $R := S[x]/(p(x))$. Dann gilt: ist M ein Σ - R -Modul, so ist M ein Σ - S -Modul.

Beweis durch vollständige Induktion nach n .

Für $n = 1$ ist $R \cong S$ und es ist nichts zu zeigen. Das Lemma sei nun schon bewiesen für alle kommutativen Ringe S und für alle Polynome vom Grad $n - 1$. Es sei nun $p(x) \in S[x]$ ein Polynom vom Grad n ; α sei das Bild von x in $R = S[x]/(p(x))$. R ist als S -Modul frei vom Rang n und wird als Ring über S durch das ganze Element α erzeugt. Es sei $T := R \otimes_S R$.

Aus der exakten Folge

$$0 \longrightarrow S[y]p(y) \longrightarrow S[y] \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

erhält man durch Tensorieren mit R über S die exakte Folge

$$R \otimes_S S[y]p(y) \longrightarrow R \otimes_S S[y] \longrightarrow R \otimes_S R \longrightarrow 0$$

Nun ist $R \otimes_S S[y] \cong R[y]$ als R -Algebra; also hat man einen R -Alge-

bren-Isomorphismus $\psi : R[y]/(p(y)) \rightarrow R \otimes_S R$, wobei in $R \otimes_S R$ diejenige

R -Algebrenstruktur zu nehmen ist, die von dem linken Faktor herrührt.

ψ wird beschrieben durch $\psi(\bar{y}) = 1 \otimes \alpha$ wobei $\bar{y}$ das Bild der Unbestimm-

ten y in $R[y]/(p(y))$ bedeutet. Es sei $\delta : \alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha \in T$,

$\delta^* : T \rightarrow T$ sei die Multiplikation mit δ und $\mu : R \otimes_S R \rightarrow R$ sei der

durch $\mu(r_1 \otimes r_2) = r_1 r_2$ beschriebene Homomorphismus. Dann ist

$\epsilon := \psi^{-1}(\delta) = \alpha - \bar{y}$. $\epsilon^* : R[y]/(p(y)) \rightarrow R[y]/(p(y))$ bezeichne die

Multiplikation mit ϵ und es sei $\lambda := \mu \psi$, also $\lambda(\bar{y}) = \alpha$. Man

betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} R[y]/(p(y)) & \xrightarrow{\epsilon^*} & R[y]/(p(y)) & \xrightarrow{\lambda} & R & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ R \otimes_S R & \xrightarrow{\delta^*} & R \otimes_S R & \xrightarrow{\mu} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die obere Zeile ist exakt. Zunächst ist $\lambda \epsilon^* = 0$, da $\lambda(\epsilon) = \lambda(\bar{y} - \alpha) = 0$.

Ist $\sum_i r_i \bar{y}^i \in \text{Ker}(\lambda)$, so ist $\sum_i r_i \alpha^i = 0$, folglich existiert ein

Polynom $g(y) \in R[y]$ mit $\sum_i r_i y^i = g(y)(\alpha - y)$. Dann ist aber

$\sum_i r_i \bar{y}^i = \epsilon^*(g(\bar{y}))$. In $R[y]$ zerfällt $p(y)$ in ein Produkt

$p(y) = q(y)(\alpha - y)$. Es soll gezeigt werden, dass $\text{Ker}(\epsilon^*) = (q(y))/(p(y))$.

Ist $g(y) \in R[y]$ mit $\epsilon^*(g(\bar{y})) = 0$, so existiert ein $h(y) \in R[y]$

mit $g(y)(\alpha - y) = h(y)p(y)$
 $= h(y)q(y)(\alpha - y)$,

also ist $g(y) = h(y) q(y)$, somit $g(\bar{y}) \in (q(y))/(p(y))$. Es bezeichne $\text{Ann}(\delta)$ den Annulator von δ in T . Sei $\bar{T} := T/\text{Ann}(\delta)$. Wegen $\text{Ker}(\epsilon^*) = (q(y))/(p(y))$ wird durch ψ ein R -Algebrenisomorphismus $\bar{\psi} : R[y]/(q(y)) \rightarrow \bar{T}$ induziert, wobei in $\bar{T}$ die vom linken Faktor in $R \otimes_S R = T$ herrührende R -Algebrenstruktur zu nehmen ist. Man hat also die folgende exakte Folge von T -Moduln und T -Homomorphismen

$$0 \longrightarrow \bar{T} = R \otimes_S R / \text{Ann}(\delta^*) \longrightarrow R \otimes_S R \xrightarrow{\mu} R \longrightarrow 0$$

Diese Folge zerfällt als Folge von R -Linksmoduln und auch als Folge von R -Rechtsmoduln.

Es sei nun ${}_R M$ ein Σ - R -Modul. Dann ist die Folge

$$0 \longrightarrow \bar{T} \otimes_R M \longrightarrow T \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \longrightarrow 0$$

exakt. Nach Behauptung 2.5. ist $\bar{T} \otimes_R M$ ein Σ - $\bar{T}$ -Modul. Die R -(Links-) Algebra $\bar{T} \cong R[y]/(q(y))$ erfüllt die Induktionsvoraussetzung. Also ist $\bar{T} \otimes_R M$ ein Σ - R -Modul bezüglich der durch

$$r \cdot (\bar{t} \otimes m) = \overline{(r \otimes 1) \cdot t \otimes m}$$

Aus der Behauptung 2.3. folgt, dass $T \otimes_R M = R \otimes_S R \otimes_R M \cong R \otimes_S M$ ein Σ - R -Modul ist bezüglich der durch $r \cdot (t \otimes m) = [(r \otimes 1)t] \otimes m$ gegebenen R -Modul-Struktur.

Ist $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von S -Untermoduln von M mit $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$, so ist $(R \otimes_S M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von R -Untermoduln von $R \otimes_S M$ mit $R \otimes_S M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R \otimes_S M_i$. Wäre nun $M_i \neq M$ für alle i , so wäre auch $R \otimes_S M_i \neq R \otimes_S M$ für alle i , da R ein freier S -Modul ist. Dies ist aber nicht möglich, da $R \otimes_S M$ ein Σ - R -Modul ist.

Folgerung 3.3.

Sind R, S zwei kommutative Ringe, $S \subseteq R$, und wird R über S durch endlich viele ganze Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ erzeugt, so ist jeder Σ - R -Modul M ein Σ - S -Modul.

Beweis .

Es genügt offensichtlich, den Fall $r = 1$ zu betrachten. Sei also $R = S[\alpha]$, wobei α ein Polynom $p(x) \in S[x]$ mit höchstem Koeffizienten 1 annulliert. Sei $R' := S[x]/(p(x))$. Dann hat man einen surjektiven Ringhomomorphismus $\psi : R' \rightarrow R$ vermöge $\psi(\bar{x}) = \alpha$. Ist nun M ein Σ - R -Modul, so ist M auch ein Σ - R' -Modul und damit nach Lemma 3.2. ein Σ - S -Modul.

Beweis von Satz 3.1.

Ergibt sich unmittelbar aus der Folgerung 3.3.

§ 4 . Existenz nicht endlich erzeugter Σ -Moduln .

Behauptung 4.1.

Es sei R ein beliebiger Ring. Ist I eine streng geordnete Indexmenge, die keine abzählbare kofinale Teilmenge besitzt, ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine aufsteigende Kette von endlich erzeugten Untermoduln eines R -Moduls A mit $A_\alpha \neq A$ für alle $\alpha \in I$, und gilt $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, dann ist A ein nicht endlich erzeugter Σ - R -Modul.

Beweis .

Es sei $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare aufsteigende Kette von Untermoduln $B_k \subseteq A$ mit $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = A$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setze man $I_k := \{\alpha \in I \mid A_\alpha \subseteq B_k\}$. Dann gilt $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$. Da jedes A_α endlich erzeugt ist, ist jedes $\alpha \in I$ in mindestens einem I_k enthalten. Daher ist $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$. Da I keine abzählbare kofinale Teilmenge besitzt, gibt es ein n mit $I = I_n$. Daraus folgt $A = B_n$; also ist A ein Σ -Modul.

Diese Behauptung gestattet es, Σ -Moduln zu konstruieren, die nicht endlich erzeugt sind.

Beispiel 4.2.

Es sei Ω eine streng geordnete Menge ohne abzählbare kofinale Teilmenge, z.B. die Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen. Es sei Λ die Menge aller Paare $(\alpha, \beta) \in \Omega \times \Omega$ mit $\alpha \leq \beta$. Es sei S ein beliebiger Ring. Im Polynomring $S[x_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ betrachte man das von den Elementen

$x_{(\alpha, \beta)}, x_{(\beta, \gamma)} - x_{(\alpha, \gamma)} \quad (\alpha \leq \beta \leq \gamma)$ erzeugte Ideal $\mathcal{U}$

Man setze $R := S[x_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} / \mathcal{U}$. R lässt sich auch folgendermassen

beschreiben: Es sei M_Λ das freie kommutative Monoid über Λ mit den

Erzeugenden $m_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$. M sei der Quotient von M_Λ modulo den Rela-

tionen $m_{(\alpha, \beta)} m_{(\beta, \gamma)} \sim m_{(\alpha, \gamma)} \quad (\alpha \leq \beta \leq \gamma)$. Das Bild von m_λ in M

werde mit g_λ bezeichnet. Dann lässt sich jedes Element $g \in M$ bis

auf die Reinenfolge der Faktoren eindeutig in der Form $g = \prod_{i=1}^{k(g)} g_{(\alpha_i, \beta_i)}$

mit $\alpha_i \neq \beta_j$ für $i \neq j$ schreiben. Mit dieser Definition von M gilt

$R \cong S[M]$. Man betrachte das folgende induktive System: Für $\alpha \in \Omega$

sei $R_\alpha := R$, für $\alpha \leq \beta$ sei $\varphi_{\alpha\beta} : R_\alpha \rightarrow R_\beta$ die Multiplikation

mit $g_{(\alpha, \beta)}$. Man setze $A := \varinjlim_{\alpha \in \Omega} R_\alpha$ und $A_\alpha := \varphi_\alpha(R_\alpha)$, wobei φ_α die

kanonische Injektion $R_\alpha \rightarrow A$ bezeichnet. Für jedes $\alpha \in \Omega$ sei

$a_\alpha := \varphi_\alpha(1)$. Es soll gezeigt werden, dass $a_\beta \notin A_\alpha$ für $\beta > \alpha$.

Wäre $a_\beta \in A_\alpha$, so gäbe es ein $c \in R_\alpha$ und ein $\gamma \geq \beta$ derart, dass

$\varphi_{\beta\gamma}(1) = \varphi_{\alpha\gamma}(c)$, d.h. $g_{(\beta, \gamma)} = g_{(\alpha, \gamma)} \cdot c$. Eine solche Gleichung

kann in M nicht bestehen und daher auch nicht in $S[M]$. Daher ist A ein Σ - R -Modul, der nicht endlich erzeugt ist.

Folgerung 4.3.

Ist I eine überabzählbare Indexmenge, so gibt es über dem Polynomring $S[x_\alpha]_{\alpha \in I}$ Σ -Moduln, die nicht endlich erzeugt sind.

Bemerkung 4.4.

Der Beweis von 4.2. zeigt, dass man den Ring $S[M]$ durch $S[M]/\mathcal{U}$ ersetzen kann, wenn $\mathcal{U}$ ein homogenes zweiseitiges Ideal von $S[M]$ ist. Insbesondere kann man für $\mathcal{U}$ das von allen Elementen g^2 ($g \in M$) erzeugte Ideal nehmen.

Folgerung 4.5.

Es sei k ein Körper, I eine überabzählbare Indexmenge. Dann besitzt der lokale Ring $R : k[x_\alpha]_{\alpha \in I} / \sum_{\alpha \in I} (x_\alpha^2)$, dessen maximales Ideal ein Nilideal ist, Σ -Moduln, die nicht endlich erzeugt sind.

§ 5. Torsionsfreie Σ -Moduln über Krullschen Ringen.

Es sei R ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper Q . Ist A ein torsionsfreier Σ - R -Modul, so kann $Q \otimes_R A$ in nur endlich viele direkte Summanden zerfallen, d.h. A ist von endlichem Rang.

Satz 5.1.

Es sei R ein Krullscher Ring. Dann ist jeder torsionsfreie Σ - R -Modul A Untermodul eines endlich erzeugten freien R -Moduls.

Für die Eigenschaften von Krullschen Ringen und für die unten verwendeten Bezeichnungen, sehe man [5].

Beweis.

Es sei M ein Σ - R -Modul. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $R^n \subseteq M \subseteq Q^n$. Es sei ϕ die Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ von R der Höhe 1 mit $M \not\subseteq R_{\mathfrak{p}}^n$. Angenommen ϕ wäre nicht endlich. Dann gibt es eine absteigend Kette von (unendlichen) Teilmengen $\phi_1 \supset \phi_2 \supset \dots$ von ϕ mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} \phi_i = \emptyset$. Es sei $F_i := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \phi_i} R_{\mathfrak{p}}^n$. Ist $q \in Q$, so ist $q \in R_{\mathfrak{p}}$ für fast alle Primideale der Höhe 1. Also ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = Q^n$ und somit $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (M \cap F_i)$.

Da $M \not\subseteq F_i$ für alle i ist das ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass M in Σ -Modul ist. Also gibt es nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ der Höhe 1 mit $M \not\subseteq R_{\mathfrak{p}_i}$. Es seien $v_1, \dots, v_s$ die zugehörigen Bewertungen. Für jede natürliche Zahl k sei

$$M_k := \{x \in M \mid v_i(x) \geq -k \text{ für } i = 1, \dots, s\}.$$

Dann ist $M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$, also $M = M_{k_0}$ für ein gewisses k_0 .

Man nehme ein Element $r \in R$ mit $v_i(r) = +k_0$ für $i = 1, \dots, s$. (Existenz von r : [5, Ch. VII, § 1, Prop. 9]). Dann ist $rM \subseteq R^n$.

Folgerung 5.2.

Es sei R ein Krullscher Ring, in dem jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist. Dann ist jeder torsionsfreie Σ - R -Modul endlich erzeugt.

Beweis.

Es sei A ein torsionsfreier Σ - R -Modul. Nach 5.1. existiert ein endlich erzeugter freier R -Modul F mit $A \subseteq F$. Da in R jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist, ist A abzählbar erzeugbar. Also ist A endlich erzeugt.

Folgerung 5.3.

Es sei R ein faktorieller Ring, in dem jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist. Dann ist jeder torsionsfreie Σ - R -Modul endlich erzeugt.

Bemerkung 5.4.

Die Voraussetzungen von 5.3. sind insbesondere dann erfüllt wenn $R := k[x_1, x_2, \dots]$ der Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten über einem Körper ist. In Kapitel II, § 5 wird gezeigt werden, dass in diesem Fall sogar jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt ist.

KAPITEL II

Ringe, über denen jeder Σ -Modul endlich erzeugt ist.

§ 1. Σ -Moduln und Noethersche Ringe.

Satz 1.1.

Ein Ring R ist genau dann links-Noethersch wenn jeder Untermodul eines Σ - R -Linksmoduls ein Σ -Modul ist.

Beweis.

Es sei R ein links-Noetherscher Ring, A ein Σ - R -Linksmodul und B ein Untermodul von A . Ist $f: B \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ ein Homomorphismus von B in eine direkte Summe von R -Linksmoduln, so wähle man zu jedem X_{α} eine injektiven Erweiterung E_{α} , die nach [6, Theorem 3.3.] immer existiert. Es sei $j: \bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} E_{\alpha}$ die Inklusion. Da der Ring R links-Noethersch ist, ist die direkte Summe von injektiven R -Linksmoduln injektiv [6, Ch.1, Ex. 8], insbesondere ist $\bigoplus_{\alpha \in I} E_{\alpha}$ injektiv. Daher besitzt $j \circ f$ eine Fortsetzung $g: A \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} E_{\alpha}$. Da A ein Σ -Modul ist, ist $g(A)$ und damit erst recht $j \circ f(B)$ in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{\alpha \in I} E_{\alpha}$ enthalten. Also ist $f(B)$ in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ enthalten. Somit ist gezeigt, dass B ein Σ -Modul ist.

Umgekehrt, ist jeder Untermodul eines Σ - R -Linksmoduls, ein Σ -Modul, so ist jeder Σ - R -Linksmodul Noethersch. Insbesondere ist dann R selbst links-Noethersch.

Folgerung 1.2.

Über einem links-Noetherschen Ring R ist jeder Σ - R -Linksmodul Noethersch, also insbesondere endlich erzeugt.

§ 2 . Die endliche Erzeugbarkeit von Σ -Moduln der Summe von Noetherschen Untermoduln sind .

Eine Verschärfung der obigen Folgerung 1.2. liefert der folgende Satz :

Satz 2.1.

Es sei R ein beliebiger Ring, A ein Σ - R -Modul, der Summe von Noetherschen Untermoduln ist. Dann ist A ein Noetherscher R -Modul .

Da über einem beliebigen Ring die Summe von injektiven Moduln im allgemeinen nicht mehr injektiv ist, braucht man einen Ersatz für diese Tatsache. Einen solchen Ersatz, mit dem man den Satz 2.1. beweisen kann, liefert das folgende Lemma :

Lemma 2.2.

Es sei $i : \bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha} \rightarrow E$ ein wesentlicher Monomorphismus von einer direkten Summe von R -Moduln in einen R -Modul E , der Summe von Noetherschen Untermoduln ist. Dann existieren wesentliche Erweiterungen $j_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow E_{\alpha}$ für alle $\alpha \in I$ und ein Homomorphismus $\varphi : E \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} E_{\alpha}$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha} & \xrightarrow{i} & E \\
 \searrow \bigoplus_{\alpha \in I} j_{\alpha} & & \downarrow \varphi \\
 & & \bigoplus_{\alpha \in I} E_{\alpha}
 \end{array}$$

kommutativ ist .

Bemerkung 2.3.

Der nach Lemma 2.2. existierende Homomorphismus φ ist notwendig ein wesentlicher Monomorphismus .

Beweis von Lemma 2.2.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $\bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha} \subseteq E$. Man betrachte die Menge aller Paare $(C, (V_{\alpha})_{\alpha \in I})$ bestehend aus einem Untermodul $C \subseteq E$, der $\bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ enthält, und einer Familie $(V_{\alpha})_{\alpha \in I}$ von Untermoduln von C derart, dass gilt:

- i) Für jedes $\alpha \in I$ ist $X_{\alpha} \rightarrow C/V_{\alpha}$ eine wesentliche Erweiterung von X_{α} .
- ii) Ist U ein Noetherscher Untermodul von C , so ist $U \subseteq V_{\alpha}$ für fast alle α .

Die Menge dieser Paare wird durch die folgende Relation teilweise geordnet:

$$(C, (V_{\alpha})_{\alpha \in I}) \leq (C', (V'_{\alpha})_{\alpha \in I}) : \Leftrightarrow C \subseteq C' \text{ und } V_{\alpha} \subseteq V'_{\alpha}$$

für alle $\alpha \in I$.

Weil $X_{\alpha} \rightarrow C/V_{\alpha}$ wesentlich ist und da $X_{\alpha} \rightarrow C'/V'_{\alpha}$ ein Monomorphismus ist, folgt überdies, dass $C/V_{\alpha} \rightarrow C'/V'_{\alpha}$ ein Monomorphismus ist. Es soll gezeigt werden, dass die Ordnung induktiv ist. Es existiert wenigstens ein Paar, da man $C = \bigoplus_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ und $V_{\alpha} = \bigoplus_{\beta \neq \alpha} X_{\beta}$

für $\alpha \in I$ nehmen kann. Ist J eine streng geordnete Indexmenge und ist $(C_{\beta}, (V_{\beta\alpha})_{\alpha \in I})_{\beta \in J}$ eine aufsteigende Kette, so sehe man $C' := \bigcup_{\beta \in J} C_{\beta}$, $V'_{\alpha} := \bigcup_{\beta \in J} V_{\beta\alpha}$ für $\alpha \in I$. Für jedes $\alpha \in I$ ist $X_{\alpha} \rightarrow C'/V'_{\alpha} = \varinjlim_{\beta \in J} C_{\beta}/V_{\beta\alpha}$ wesentlich, da $X_{\alpha} \rightarrow C_{\beta}/V_{\beta\alpha}$ wesentlich ist für alle $\beta \in J$. Ist U ein Noetherscher Untermodul von C' , so ist $U \subseteq C_{\beta_0}$ für ein gewisses $\beta_0 \in J$, also $U \subseteq V_{\beta_0\alpha} \subseteq V'_{\alpha}$ für fast alle α . Daher existiert ein maximales Paar $(C, (V_{\alpha})_{\alpha \in I})$. Es soll gezeigt werden, dass $C = E$.

Für $\alpha \in I$ sei $V_{\alpha} : C \rightarrow C/V_{\alpha}$ der kanonische Homomorphismus. Wegen der Bedingung (ii) faktorisiert der Homomorphismus

$C \xrightarrow{(\nu_\alpha)_{\alpha \in I}} \bigoplus_{\alpha \in I} C/\nu_\alpha$ durch $\bigoplus_{\alpha \in I} C/\nu_\alpha$. Die Faktorisierung werde mit g bezeichnet. Angenommen, $C \neq E$. Dann existiert ein Noetherscher Untermodul $U \subseteq E$, $U \not\subseteq C$. Da $U \cap C$ Noethersch ist, gibt es eine endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ derart, dass $U \cap C \subseteq \nu_{\alpha'} \cdot C$ für alle $\alpha' \in I'$. Für jedes $\alpha \in I'$ sei F_α die injektive Hülle von C/ν_α (s. [7]) und $h_\alpha : C/\nu_\alpha \subseteq F_\alpha$ bezeichne die Inklusion. Dann existiert ein Homomorphismus $f : (\bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha) + U \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha$, der das folgende Diagramm kommutativ macht, wobei g' die Einschränkung von g bezeichnet

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha) + (U \cap C) & \xrightarrow{\subseteq} & (\bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha) + U \\ \downarrow g' & & \downarrow f \\ \bigoplus_{\alpha \in I'} C/\nu_\alpha & \xrightarrow{h := \bigoplus h_\alpha} & \bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha \end{array}$$

Die beiden Homomorphismen

$$\begin{aligned} C &\xrightarrow{g} \bigoplus_{\alpha \in I} C/\nu_\alpha \xrightarrow{h \oplus \text{id}} (\bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in I \setminus I'} C/\nu_\alpha) \\ U &\xrightarrow{f/U} \bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha \xrightarrow{\subseteq} (\bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in I \setminus I'} C/\nu_\alpha) \end{aligned}$$

stimmen auf $U \cap C$ überein. Sie besitzen also eine gemeinsame Fortsetzung $\downarrow$ auf $C + U$. Es bezeichne π_α die Projektion von $(\bigoplus_{\alpha \in I'} F_\alpha) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in I \setminus I'} C/\nu_\alpha)$ auf F_α (für $\alpha \in I'$) bzw. auf C/ν_α (für $\alpha \in I \setminus I'$).

Es sei $C' : C + U$, $\nu'_\alpha := \text{Ker}(\pi_\alpha \downarrow)$ für $\alpha \in I$. Dann ist $(C', (\nu'_\alpha)_{\alpha \in I})$ ein Paar, das den Bedingungen (i) und (ii) genügt und das echt grösser ist als $(C, (\nu_\alpha)_{\alpha \in I})$ im Widerspruch zur Maximalität von $(C, (\nu_\alpha)_{\alpha \in I})$. Also ist $C = E$. Man setze $E_\alpha := C/\nu_\alpha$ und $\varphi := g$.

Bemerkung 2.4.

Der Beweis des Lemmas 2.3. lässt sich so abändern, dass er sich in beliebigen Abelschen Kategorien mit exaktem direktem Limes durchführen lässt. Insbesondere kann man auf die Existenz von injektiven Objekten verzichten.

Beweis von Satz 2.1.

Es sei A ein Σ -R-Modul, der Summe von Noetherschen Untermoduln ist. Es sei $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von A und es sei $B : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} B/B_k$ bezeichne den Homomorphismus, dessen Komponenten die kanonischen Homomorphismen sind.

Es sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ & \nearrow h & \\ \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} B/B_k & & \end{array}$$

die Fasersumme von A und $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} B/B_k$ über B . Dann ist h ein Monomorphismus. Es sei U ein Untermodul von C , maximal bezüglich der Eigenschaft $U \cap \text{Bi}(h) = 0$. Sei $v : C \rightarrow C/U$ der kanonische Homomorphismus. Dann ist vh ein wesentlicher Monomorphismus. Da C und damit auch C/U Summe von Noetherschen Untermoduln ist, existieren nach Lemma 3.2. wesentliche Erweiterungen $j_k : B/B_k \rightarrow E_k$ und ein Homomorphismus $\varphi : C/U \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E_k$ mit $\bigoplus j_k = \varphi vh$. Man erhält insgesamt das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\subseteq} & A \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} B/B_k & \xrightarrow{h} & C \\ & \searrow \bigoplus j_k & \downarrow v \\ & & C/U \\ & & \downarrow \varphi \\ & & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E_k \end{array}$$

Da A ein Σ -Modul ist, liegt das Bild von $\varphi v p$ in einer endlichen Teilsumme von $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E_k$. Also wird die Kette $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ stationär.

§ 3. Reduktion des Problems der endlichen Erzeugbarkeit von Σ -Moduln und einige Resultate, die sich daraus ergeben.

Definition 3.1.

Ein Linksideal $\mathcal{A}$ eines Ringes R heisst links T -nilpotent, wenn es zu jeder Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus R ein n gibt mit $a_1, a_2, \dots, a_n = 0$. Ein Ring R heisst links-perfekt, wenn das Jacobsonradikal $Ra(R)$ links T -nilpotent ist, und wenn $R/Ra(R)$ halbeinfach ist (s. [2]).

Bemerkung 3.2.

Ist $\mathcal{A}$ ein links T -nilpotentes Linksideal eines Ringes R und ist B ein Untermodul eines R -Moduls A mit $B + \mathcal{A}A = A$, so gilt $B = A$ (Beweis in [2]).

Lemma 3.3.

Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette von links T -nilpotenten zweiseitigen Idealen eines Ringes R . Ist über $R / \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ jeder Σ -Linksmodul endlich erzeugt, so ist auch jeder Σ - R -Linksmodul endlich erzeugt.

Beweis.

Es sei A ein Σ - R -Modul. Nach Voraussetzung ist $A / (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i)A$ endlich erzeugt. Daher existiert ein endlich erzeugter Untermodul $A_1 \subseteq A$ mit $A = A_1 + \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_1 + \mathcal{A}_i A)$. Da A ein Σ -Modul ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A = A_1 + \mathcal{A}_k A$. Da $\mathcal{A}_k$ links T -nilpotent ist, ist $A = A_1$.

Folgerungen 3.4.

- i) Über einem links-perfekten Ring ist jeder Σ -Linksmodul endlich erzeugt .
- ii) Über einem links-Artinschen Ring ist jeder Σ -Linksmodul und jeder Σ -Rechtsmodul endlich erzeugt .
- iii) Ist R ein kommutativer Ring, ist $\mathcal{N}$ ein abzählbar erzeugbares Nilideal von R und ist jeder $\Sigma - R/\mathcal{N}$ -Modul endlich erzeugt, so ist jeder $\Sigma - R$ -Modul endlich erzeugt.
- iv) Ist R ein kommutativer lokaler Ring, dessen maximales Ideal ein abzählbar erzeugbares Nilideal ist, so ist jeder $\Sigma - R$ -Modul endlich erzeugt .

Beweis .

- i) Über einem halbeinfachen Ring ist jeder Modul halbeinfach, also ist jeder Σ -Modul endlich erzeugt .
 - ii) Ein links - Artinschen Ring R ist beidseitig perfekt, da $Ra(R)$ nilpotent und $R/Ra(R)$ halbeinfach ist $[1]$. Da ein links - Artinschen Ring links-Noethersch ist, folgt die Tatsache, dass jeder Σ -Linksmodul endlich erzeugt ist auch aus § 1 .
- iii), iv) klar .

Bemerkung 3.5.

Über einen beliebigen lokalen kommutativen Ring, dessen maximales Ideal ein Nilideal ist, braucht ein Σ -Modul nicht endlich erzeugt zu sein, wie die Folgerung 4.5. in Kapitel I zeigt .

Lemma 3.6.

Es sei R ein kommutativer Ring, in dem jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist. Ist A ein $\Sigma - R$ -Modul, der nicht endlich erzeugt ist, so existiert ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ derart, dass $A/\mathfrak{p}A$ nicht endlich erzeugt ist, $A/\mathfrak{q}A$ jedoch endlich erzeugt ist für jeder echt grössere Ideal $\mathfrak{q}$.

Beweis .

Es soll gezeigt werden, dass die Menge der Ideale $\mathcal{U} \subseteq R$, für die $A/\mathcal{U}A$ nicht endlich erzeugt ist, induktiv geordnet ist. Ist $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine aufsteigende Kette solcher Ideale, so sei

$\mathcal{U} := \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$. Nach Voraussetzung kann $\mathcal{U}$ durch eine abzähl-

bare Familie $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen erzeugt werden. Zu jedem

$k \in \mathbb{N}$ existiert ein α_k mit $\sum_{i=1}^k R a_i \in \mathcal{U}_{\alpha_k}$. Man kann überdies

annehmen dass die Folge des α_k monoton wächst. Dann ist

$\mathcal{U} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{\alpha_k}$. Angenommen, $A/\mathcal{U}A$ wäre endlich erzeugt. Dann

existiert ein endlich erzeugter Untermodul $A_1 \subseteq A$ mit

$A = A_1 + \mathcal{U}A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_1 + \mathcal{U}_{\alpha_k} A)$. Da A ein Σ -Modul ist, gibt

es ein n mit $A = A_1 + \mathcal{U}_{\alpha_n} A$.

Damit erhält man einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass $A/\mathcal{U}_{\alpha_n} A$ nicht endlich erzeugt ist. Unter den Idealen $\mathcal{U} \subseteq R$ für die

$A/\mathcal{U}A$ nicht endlich erzeugt ist, existiert also ein maximales.

$\mathfrak{p} \subseteq A$ sei ein solches. Sind $a_1, a_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$, dann existieren

endlich erzeugte Untermoduln $A_1, A_2 \subseteq A$ mit $A = A_1 + a_1 A + \mathfrak{p} A =$

$= A_2 + a_2 A + \mathfrak{p} A$. Daher ist $A = A_1 + a_1 A_2 + a_1 a_2 A + \mathfrak{p} A$; also ist

$a_1 a_2 \notin \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal.

Satz 3.7.

Es sei R ein kommutativer Ring mit den beiden folgenden Eigenschaften :

- i) Jedes Ideal von R ist abzählbar erzeugbar .
- ii) Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ ist der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ ein abzählbar erzeugbarer R -Modul .

Dann ist jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt .

Beweis .

Es sei A ein Σ - R -Modul . Angenommen, A wäre nicht end-

lich erzeugt. Dann kann man nach Lemma 3.6. annehmen, dass R ein Integritätsbereich ist und dass A/rA für jedes $r \neq 0, r \in R$ endlich erzeugt ist. Es sei Q der Quotientenkörper von R . Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare Familie $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $R \setminus \{0\}$ mit $Q = \sum_{i \in \mathbb{N}} R \cdot \frac{1}{s_i}$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $t_k := \prod_{i=1}^k s_i$. Ist A ein Torsionsmodul, so ist $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit $A_k = \{a \in A \mid t_k a = 0\}$. Da A ein Σ -Modul ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A = A_n$, also $t_n A = 0$ im Widerspruch dazu, dass $A/t_n A$ nicht endlich erzeugt ist. Ist A kein Torsionsmodul, so sei $T(A)$ der Torsionsuntermodul von A . Dann ist $A/T(A)$ ein torsionsfreier Σ -Modul, also von endlichem Rang. Somit existiert ein endlich erzeugter Untermodul $A_1 \subset A$, so dass $A/A_1 + T(A)$ ein Σ - R -Torsionsmodul ist. Also ist $A/A_1 + T(A)$ endlich erzeugt. Es gibt daher einen endlich erzeugten Untermodul $A_2 \subset A$ derart, dass A/A_2 ein epimorphes Bild von $T(A)$ ist. Also ist A/A_2 ein nicht endlich erzeugter Σ - R -Torsionsmodul und man erhält auf diese Weise einen Widerspruch.

Folgerung 3.8.

Ist R ein abzählbarer kommutativer Ring, so ist jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt.

Folgerung 3.9.

Ist R ein kommutativer nulldimensionaler Ring (z. B. ein kommutativer von-Neumann regulärer Ring), in dem jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist, so ist jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt.

Behauptung 3.10.

Es sei R ein Ring, über dem jeder nicht endlich erzeugte Linksmodul einen abzählbar erzeugten Faktormodul besitzt, der nicht endlich erzeugt ist. Dann ist jeder Σ - R -Linksmodul endlich erzeugt.

Beweis.

Folgt aus der Behauptung 2.2. von Kapitel I.

Beispiele 3.11.

Über den folgenden Ringen besitzt jeder nicht endlich erzeugte Linksmodul einen abzählbar erzeugten Faktormodul, der nicht endlich erzeugt ist.

- i) Links-perfekte Ringe .
- ii) Kommutative Noethersche Ringe .
- iii) Kommutative von-Neumann reguläre Ringe, in denen jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist .

Beweis .

i) Ein Linksmodul A über einem links-perfekten Ring ist genau dann endlich erzeugt, wenn der halbeinfache Modul $A/Ra(R)A$ endlich erzeugt ist. Ist A nicht endlich erzeugt, so besitzt $A/Ra(R)A$ einen direkten Summanden, der direkte Summe von abzählbar vielen einfachen R -Moduln ist .

ii) Es sei A ein nicht endlich erzeugter Modul über einem kommutativen Noetherschen Ring R . Dann gibt es eine echt aufsteigende Kette $B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \dots$ von endlich erzeugten Untermoduln von A . Es sei $B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen Epimorphismus v_k von B_{k+1}/B_k in einen einfachen Modul S_k .

Es sei $E(S_k)$ die injektive Hülle von S_k . Dann lässt sich v_k fortsetzen zu einem Homomorphismus $f_k : B \rightarrow E(S_k)$. Es sei $f : B \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E(S_k)$ der Homomorphismus mit den Komponenten f_k .

Da $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E(S_k)$ injektiv ist, besitzt f eine Fortsetzung

$g : A \rightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E(S_k)$. Nach [10] ist jedes $E(S_k)$ abzählbar erzeugt. Also ist $Bi(g)$ abzählbar erzeugbar . $Bi(g)$ kann nicht endlich erzeugt sein da es nach Konstruktion $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (S_k)$ enthält.

iii) Sei R ein kommutativer von-Neumann regulärer Ring, in welchem jedes Ideal abzählbar erzeugbar ist, und sei A ein nicht endlich erzeugter R -Modul. Nach Folgerung 3.9. gibt es eine echt aufsteigende abzählbare Kette $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots$ von Untermoduln von A mit

$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es daher ein Primideal $\mathfrak{p}_k \subset R$ mit $(A_{k+1}/A_k)_{\mathfrak{p}_k} \neq 0$. Da für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ der Ring

$R/\mathfrak{p} = R/\mathfrak{p}$ ein Körper ist, besitzt $(A_{k+1}/A_k)_{\mathfrak{p}_k}$ einen einfachen direkten Summanden S_k , der auch ein direkter Summand von $(A/A_k)_{\mathfrak{p}_k}$ ist. Also ist $\bigoplus_k S_k$ ein epimorphes Bild von A .

Bemerkung 3.12.

Das Beispiel 3.11. iii) liefert in Verbindung mit Behauptung 3.10. keinen neuen Beweis für die endliche Erzeugbarkeit von Σ -Moduln (unter den entsprechenden Voraussetzungen), da zum Beweis von 3.11. iii) die Folgerung 3.9. benutzt wurde.

§ 4. Vollständige Lösung des Problems für Bewertungsringe.

Satz 4.1.

Es sei R ein Bewertungsring. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

- i) Der Quotientenkörper von R und jedes Ideal von R sind als R -Moduln abzählbar erzeugbar.
- ii) Jeder Σ - R -Modul ist endlich erzeugt.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii) Da jedes Ideal von R abzählbar erzeugbar ist, ist jeder Untermodul eines abzählbar erzeugbaren R -Moduls abzählbar erzeugbar. Insbesondere ist $R_{\mathfrak{p}}$ als R -Modul abzählbar erzeugbar

für jedes Primideal $\mathfrak{p}$. Damit ist aber auch $\text{Quot}(R/\mathfrak{p}) \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ abzählbar erzeugbar. Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 3.7. .

ii) $\Rightarrow$ i) Es sei A der Quotientenkörper von R oder ein nicht endlich erzeugtes Ideal von R . Nach Voraussetzung ist dann A kein Σ -Modul, also existiert eine echt aufsteigende Kette $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots$ von R -Untermoduln von A mit $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Für jedes i sei $a_i \in A_{i+1} \setminus A_i$. Dann ist $A_i \subset R a_i \subseteq A_{i+1}$, also $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R a_i$.

§ 5 . Zentral abzählbar erzeugbare Algebren über einem Schiefkörper .

Das Ziel dieses Paragraphen ist der folgende Satz, der auf die Frage nach der endlichen Erzeugbarkeit von Σ -Moduln eine weitgehende Antwort liefert .

Satz 5.1.

Es sei k ein Schiefkörper, $R := k[x_1, x_2, \dots]$ der Polynomring über k in abzählbar vielen Unbestimmten. Dann ist jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt .

Bemerkung 5.2.

Nimmt man überabzählbar viele Unbestimmte, so gibt es nicht endlich erzeugte Σ -Moduln wie die Folgerung 4.3. in Kapitel I zeigt .

Lemma 5.3.

Es sei $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots$ eine Folge von Ringen, die alle über R_0 zentral erzeugt sind. Es sei $R := \bigcup_{\ell=0}^{\infty} R_{\ell}$ und es sei A ein Σ - R -Modul derart, dass $R_{\ell}a$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ und für jedes $a \in A$ ein R_{ℓ} -Modul von endlicher Länge ist. Dann ist A endlich erzeugt.

Beweis .

Angenommen, A wäre nicht endlich erzeugt. Dann kann man eine Folge $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots$ von R -Untermoduln von A konstruieren derart, dass A/U_n als R_n -Modul halbeinfach und als R -Modul nicht endlich erzeugt ist . Man setze $U_{-1} := 0$. Es sei U_{n-1} schon definiert. Sei $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ die untere Loewyreihe (Definition in [1, Ch. IX, § 4]) von $B := A/U_{n-1}$. Sie besteht aus R -Moduln und bricht nach endlich vielen Schritten ab, da B ein Σ - R -Modul ist. Also gibt es ein ℓ , so dass B/B_{ℓ} nicht

endlich, $B/B_{\ell+1}$ aber endlich erzeugt ist als R -Modul. Sei C ein R -Untermodul von B , der endlich erzeugt ist mit $B = B_{\ell+1} + C$. Dann ist $B/B_{\ell} + C$ als R -Modul nicht endlich erzeugt, jedoch halbeinfach als R_n -Modul. U_n sei das Urbild von $B_{\ell} + C$ in A . Dann ist $U_{n-1} \subseteq U_n$ und $A/U_n \cong B/B_{\ell} + C$; also hat U_n die gewünschte Eigenschaft. Sei $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Dann ist M/U ein halbeinfacher Σ - R -Modul, also ein endlich erzeugter R -Modul. Sei A_1 ein endlich erzeugter R -Untermodul von A mit $A = A_1 + \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A = A_1 + U_m$ im Widerspruch dazu, dass A/U_n nicht endlich erzeugt ist.

Lemma 5.4.

Es sei k ein Schiefkörper. Dann besitzt $k[x]$ einen (beidseitigen) Quotientenschiefkörper.

Beweis .

Für alle $r, s \in R \setminus \{0\}$ ist zu zeigen $Rr \cap Rs \neq 0$ und $rR \neq sR \neq 0$. In R ist jedes Linksideal Linkshauptideal. Also ist $Rr + Rs = Rt$, also existieren $a, b, c \in R$ mit $t = ar + bs$, $r = ct$; daher ist $(1 - ca)r = cbs$. Die andere Bedingung ergibt sich entsprechend.

Folgerung 5.5.

Es sei k ein Schiefkörper. Dann besitzt der Polynomring über k $k[x_1, x_2, \dots]$ ein abzählbar vielen Unbestimmten einen beidseitigen Quotientenschiefkörper.

Lemma 5.6.

Es sei k ein Schiefkörper, $R_n := k[x_1, \dots, x_n]$, $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = k[x_1, x_2, \dots]$. Es sei A ein R -Modul, der für jedes n ein $k[x_n]$ -Torsionsmodul ist. Dann ist $\dim_k(R_n a) < \infty$ für alle $a \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis .

Es sei schon gezeigt, dass $\dim_k(R_{n-1}a) < \infty$ ist. $u_1, \dots, u_\ell$ sei eine k -Basis von $R_{n-1}a$. Nach Voraussetzung ist $k[x_n]u_i$ von endlicher Dimension. Wegen $R_n a = \sum_{i=1}^{\ell} k[x_n]u_i$ ist $\dim_k(R_n a) < \infty$.

Beweis von Satz 5.1.

Sei $R := k[x_1, x_2, \dots]$. Für jede Teilmenge M der natürlichen Zahlen sei $R_M := k[x_\alpha]_{\alpha \in M}$. Für jeden R -Modul C werde mit $T_M(C)$ der R_M -Torsionsuntermodul bezeichnet, der sogar ein R -Untermodul ist. Es sei A ein Σ - R -Modul. Angenommen, A wäre nicht endlich erzeugt. Dann ist $A/A' \neq 0$ für jeden abzählbar erzeugbaren Untermodul A' von A . Daher kann man eine Teilmenge M der natürlichen Zahlen finden, die maximal ist bezüglich folgender Eigenschaft: es existiert kein abzählbar erzeugbarer Untermodul $A' \subseteq A$ derart, dass A/A' ein R_M -Torsionsmodul ist. Für jede natürliche Zahl $n \notin M$ existiert dann ein abzählbar erzeugbarer R -Untermodul $A_n \subseteq A$ derart, dass A/A_n ein $R_{M \cup \{n\}}$ -Torsionsmodul ist. Sei $B := A / \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus M} A_n / T_M(A / \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus M} A_n)$. Damit ist B R_M -torsionsfrei, jedoch ein $R_{M \cup \{n\}}$ -Torsionsmodul für jede natürliche Zahl $n \notin M$. Sei $\bar{B} := \text{Quot}(R_M) \otimes_{R_M} B$. Sei $\bar{R} := \text{Quot}(R_M)[x_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N} \setminus M}$. $\bar{B}$ ist ein Σ - $\bar{R}$ -Modul. Für jedes $n \notin M$ ist $\bar{B}$ ein $\text{Quot}(R_M)[x_n]$ -Torsionsmodul. Aus Lemma 5.3. und Lemma 5.6. folgt, dass $\bar{B}$ ein endlich erzeugter $\bar{R}$ -Modul ist. Also existiert ein endlich erzeugter R -Untermodul, $B_1 \subseteq B$, so dass B/B_1 ein R_M -Torsionsmodul ist. B_1 ist das kanonische Bild eines endlich erzeugten R -Untermoduls $A' \subseteq A$. Daraus folgt aber, dass $A/A' + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus M} A_n$ ein R_M -Torsionsmodul ist, im Widerspruch zur Wahl von M .

Satz 5.7.

Ist S ein Links-Artinscher Ring, $R = S[x_1, x_2, \dots]$, so ist jeder Σ - R -Linksmodul endlich erzeugt.

Beweis.

- a) S ist der Ring der $n \times n$ Matrizen über einem Schiefkörper. Dann ist R isomorph zum Ring der $n \times n$ -Matrizen über $k[x_1, x_2, \dots]$. Also sind die Kategorien der R -Linksmoduln und der $k[x_1, x_2, \dots]$ -Linksmoduln äquivalent. Da der Satz für die $k[x_1, x_2, \dots]$ -Linksmoduln gilt, gilt er auch für die R -Linksmoduln.
- b) S ist ein halbeinfacher Ring. Nach dem Wedderburnschen Struktursatz ist $S = \prod_{i=1}^n S_i$ ein direktes Produkt von vollen Matrizenringen S_i über Schiefkörpern k_i . Da $S[x_1, x_2, \dots] = \prod_{i=1}^n S_i[x_1, x_2, \dots]$ ist, und da der Satz für jeden der Ringe $S_i[x_1, x_2, \dots]$ gilt, ist er auch für $S[x_1, x_2, \dots]$ richtig.
- c) S ist ein links-Artinscher Ring. Dann ist $Ra(S)$ nilpotent und $R/Ra(S)$ ist halbeinfach. Also ist $S[x_1, x_2, \dots]Ra(S)$ nilpotent und für

$$S[x_1, x_2, \dots]/S[x_1, x_2, \dots]Ra(S) \cong S/Ra(S)[x_1, x_2, \dots]$$

ist die Behauptung richtig. Also gilt sie auch für $S[x_1, x_2, \dots]$.

Folgerung 5.8.

Sei $R = S[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$ ein Ring der durch abzählbar viele zentrale Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ über einem links-Artinschen Ring erzeugt wird. Dann ist jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt.

Bemerkung 5.9.

Es bleibt die Frage offen, ob die Behauptung des Satzes auch für links-Noethersche Ringe S zutrifft. Für den Fall, dass S kommutativ ist, wird die Frage im nächsten Paragraphen positiv beantwortet.

§ 6. Kommutative abzählbar erzeugbare Algebren über Noetherschen Ringen.

Ist A ein Modul über einem kommutativen Ring, so bezeichne $\text{Supp}(A)$ den Träger von A , d.h. die Menge der Primideale $\mathfrak{p} \subset S$ mit $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Mit $\text{Spec}(A)$ werde das Primspektrum von S bezeichnet [9].

Lemma 6.1.

Es seien $S \subseteq R$ zwei Ringe; S liege im Zentrum von R und sei Noethersch. Dann gilt: Ist A ein Σ - R -Modul, so ist $\text{Supp}_S(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\text{Spec}(A)$.

Beweis.

Da S Noethersch ist, genügen die Primideale von S der absteigenden Kettenbedingung [12]. Es sei Φ die Menge der minimalen Elemente von $\text{Supp}_S(A)$. Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$, gilt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ und ist $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_S(A)$, so ist auch $\mathfrak{q} \in \text{Supp}_S(A)$. Um zu zeigen, dass $\text{Supp}_S(A)$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass Φ nur aus endlich vielen Elementen besteht.

Für jedes $\mathfrak{p} \in \Phi$ sei $\varphi_{\mathfrak{p}} : A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ der durch $\varphi_{\mathfrak{p}}(a) := \frac{a}{1}$ definierte Homomorphismus. Es sei $\varphi : A \rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \Phi} A_{\mathfrak{p}}$ der Homomorphismus mit den Komponenten $\varphi_{\mathfrak{p}}$. Jedes $A_{\mathfrak{p}}$ ist ein R -Modul und φ ist ein R -Homomorphismus. Ist $a \in A$, so besitzt $\text{Supp}(Sa)$ nur endlich viele minimale Elemente; daher ist $\varphi_{\mathfrak{p}}(a) = 0$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \Phi$. Also liegt $\text{Bild}(\varphi)$ bereits in $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \Phi} A_{\mathfrak{p}}$.

Da A nach Voraussetzung ein Σ - R -Modul ist, ist $\emptyset$ endlich.

Satz 6.2.

Es sei S ein kommutativer Noetherscher Ring, $R = S[x_1, x_2, \dots]$ sei der Polynomring über S in abzählbar vielen Unbestimmten. Dann ist jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt.

Beweis :

Da S Noethersch ist, genügen die abgeschlossenen Teilmenge von $\text{Spec}(S)$ der absteigenden Kettenbedingung. Wäre der Satz falsch, so würde wegen Lemma 6.1. eine minimale abgeschlossene Teilmenge $V \subseteq \text{Spec}(S)$ geben, zu der ein nicht endlich erzeugter Σ - R -Modul A existiert mit $\text{Supp}_S(A) = V$.

Dann nehme man ein minimales Element $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_S(A)$. Es sei $A_{\mathfrak{p}}^{(n)} := \{a \in A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p}^n a = 0\}$. Da $\mathfrak{p}$ das einzige zu $A_{\mathfrak{p}}$ assoziierte Primideal von $S_{\mathfrak{p}}$ ist, ist $\mathfrak{p}$ fast nilpotent bezüglich $A_{\mathfrak{p}}$ d.h. $A_{\mathfrak{p}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{\mathfrak{p}}^{(k)}$ [3, Ch. IV, §1, Prop. 9]. Da $A_{\mathfrak{p}}$ in Σ - $S_{\mathfrak{p}}[x_1, x_2, \dots]$ -Modul ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}^{(n)}$. Also ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein Σ - $(S_{\mathfrak{p}} / (\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}})^n)[x_1, x_2, \dots]$ -Modul. Da $S_{\mathfrak{p}} / (\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}})^n$ ein Artinscher Ring ist, ist nach Satz 5.7. $A_{\mathfrak{p}}$ ein endlich erzeugter $(S_{\mathfrak{p}} / (\mathfrak{p} S_{\mathfrak{p}})^n)[x_1, x_2, \dots]$ -Modul. Daher existiert ein endlich erzeugter R -Untermodul $A_1 \subseteq A$ derart, dass $(A/A_1)_{\mathfrak{p}} = 0$. Somit ist

$$\text{Supp}_A(A/A_1) \subseteq \text{Supp}_S(A) \setminus \{\mathfrak{p}\} = V \setminus \{\mathfrak{p}\},$$

und A/A_1 ist ein nicht endlich erzeugter Σ - R -Modul im Widerspruch zur Minimalität von V .

Folgerung 6.3.

Es sei $R = S[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$ ein kommutativer Ring, der durch abzählbar viele Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ über dem Noetherschen Ring S erzeugt wird. Dann ist jeder Σ - R -Modul endlich erzeugt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. ARTIN, J. NESBITT, M. THRALL.- Rings with Minimum Condition,
7. Aufl. , Ann Arbor 1964.-
- [2] H. BASS.- Finitistic Dimension and a Homological Generalization
of Semi-Primary Rings.- Trans. Amer. Math.
Soc. 95, 465-488 (1960) .-
- [3] N. BOURBAKI.- Algèbre Commutative, Ch. III-IV. Hermann, Paris 1961.-
- [4] " Algèbre Commutative, Ch. V-VI. Hermann, Paris 1964.-
- [5] " Algèbre Commutative, Ch. VII. Hermann, Paris 1965.-
- [6] H. CARTAN, E. EILENBERG.- Homological Algebra.- Princeton 1956.-
- [7] B. ECKMANN, A. SCHOPF.- Über injektive Moduln.- Archiv Math. 4 ,
75-78 (1953).-
- [8] P. FREYD.- Abelian Categories.- New York 1964.-
- [9] A. GROTHENDIECK (mit J. DIEUDONNE).- Eléments de Géométrie Algé-
brique. I.- Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes,
Paris 1960.-
- [10] E. MATLIS.- Injective Modules over Noetherian Rings.- Pac. J. Math.
8 , 511-528 (1958) .-
- [11] B. MITCHELL.- Theory of Categories.- New-York-London 1965.-
- [12] N. NAGATA.- Local Rings.- New-York 1962.-

Lebenslauf

Am 21. September 1940 wurde ich in Nagold in Württemberg geboren als der ältere der beiden Söhne des Fabrikanten Hugo Rentschler und seiner Ehefrau Eva, geb. Sautter.

Im September 1946 trat ich in die Volksschule, im September 1950 in das Gymnasium meines Geburtsortes ein. Am 25. Februar 1959 legte ich an diesem Gymnasium die Reifeprüfung ab.

Von 1959-1963 studierte ich an der Universität Heidelberg Mathematik und Physik mit Ausnahme des Wintersemesters 1961/62, das ich als Hilfsassistent von Prof. Dr. F. Kasch an der Pennsylvania State University in den Vereinigten Staaten verbrachte.

Am 28. Februar 1964 legte ich die Diplomprüfung mit dem Hauptfach Mathematik an der Universität Heidelberg ab. Während meines Studiums in Heidelberg besuchte ich Vorlesungen der Professoren und Dozenten Berger, Dold, Jensen, Haxel, Kasch, Köthe, Krickeberg, Maaß, Nastold, Puppe, Seifert, F. K. Schmidt, Stech, Tillmann und anderer.

Von September 1963 bis Oktober 1966 verwaltete ich eine wissenschaftliche Assistentenstelle an der Universität München.

Seither bin ich beurlaubt und arbeite als wissenschaftlicher Assistent an der Universität Straßburg.

Foto - Druck
Chemoprint^{OHG}
Gießen